УДК 517.392

И. В. Бойков, Ю. Ф. Захарова

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ И ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация. Предложены и обоснованы приближенные методы решения линейных и нелинейных сингулярных и гиперсингулярных интегродифференциальных уравнений на замкнутых контурах интегрирования. Обоснование приводится в пространствах Гельдера.

Ключевые слова: приближенные методы, сингулярные интегродифференциальные уравнения, гиперсингулярные интегродифференциальные уравнения.

Abstract. The authors suggest and substantiate approximate methods to solve linear and non-linear singular and hypersingular integro-differential equations in closed contours of integration. The substantiation is adduced in Helder space.

Key words: approximate methods, singular integro-differential equations, hypersingular integro-differential equations.

Введение

Приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений являются самостоятельным разделом вычислительной математики, активно развивающимся со второй половины двадцатого столетия. Этому направлению посвящены десятки монографий и сотни статей. Такое бурное развитие в первую очередь обусловлено многочисленными приложениями сингулярных интегральных уравнений в механике, аэродинамике, электродинамике.

По-видимому, первыми работами, непосредственно посвященными приближенным методам решения сингулярных интегродифференциальных уравнений, были статьи [1–4]. В работах [1–3] рассмотрен приближенный метод решения краевой задачи (1)–(2) и дано его обоснование сведением, с помощью представлений И. Н. Векуа и Ю. М. Крикунова, к эквивалентным сингулярным интегральным уравнениям. В работе [4] без доказательства дано приближенное решение краевой задачи для нелинейного сингулярного интегродифференциального уравнения. Представляет значительный интерес развитие метода, анонсированного в [4], так как он применим к обоснованию вычислительных схем для более общих классов уравнений, в частности, для обоснования приближенных методов решения полисингулярных интегродифференциальных уравнений.

1. Приближенное решение сингулярных интегродифференциальных уравнений на замкнутых контурах интегрирования

В данном разделе исследуются приближенные методы решения линейных сингулярных интегродифференциальных уравнений

$$Kx \equiv \sum_{k=0}^{m}\left[a_k(t)x^{(k)}(t)+b_k(t)\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma}\frac{x^{(k)}(\tau)}{\tau-t}d\tau+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{h_k(t,\tau)x^{(k)}(\tau)}{|\tau-t|^{\eta}}d\tau\right]=f(t) \quad (1)$$

при условиях

$$\int_\gamma x(t)t^{-k-1}dt = 0,\ k = 0,1,\dots,m-1, \tag{2}$$

и краевой задачи

$$Kx \equiv \sum_{k=0}^{m}\left[a_k(t)x_n^{(k)}(t) + \frac{1}{\pi i}\int_\gamma \frac{h_k(t,\tau)x^{(k)}(\tau)}{\tau - t}d\tau\right] = f(t)$$

с граничными условиями

$$\int_\gamma x(t)t^{-k-1}dt = 0,\ k = 0,1,\dots,m-1.$$

Здесь γ – единичная окружность с центром в начале координат.

Предположим выполненными следующие условия:

а) $a_k(t), b_k(t), f(t) \in H_\alpha, h_k(t,\tau) \in H_{\alpha,\alpha}, 0 < \alpha \le 1;$

б) $a_k(t), b_k(t), f(t) \in \tilde{C}[0,2\pi], h_k \in \tilde{C}[0,2\pi]^2;$

в) $a_k(t), b_k(t), f(t) \in W^r H_\alpha, h_k(t,\tau) \in W^{r,r} H_{\alpha,\alpha}, k = 0,1,\dots,m.$

Приближенное решение краевой задачи (1), (2) будем искать в виде полинома

$$x_n(t) = t^m \sum_{k=0}^{n}\alpha_k t^k + \sum_{k=-n}^{-1}\alpha_k t^k, \tag{3}$$

коэффициенты которого определяются из системы уравнений

$$K_n x_n \equiv P_n\left[\sum_{k=0}^{m}\left[a_k(t)x_n^{(k)}(t) + b_k(t)\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{x_n^{(k)}(\tau)}{\tau - t}d\tau + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma P_n^\tau\left[h_k(t,\tau)d(t,\tau)x_n^{(k)}(\tau\right]d\tau\right]\right] = P_n[f(t)], \tag{4}$$

где P_n – оператор, отображающий пространство непрерывных функций на множество интерполяционных полиномов степени n по узлам $t_k = e^{is_k}$, $s_k = 2k\pi/(2n+1),\ k = 0,1,\dots,2n,$

$$d(t,\tau) = \begin{cases} |\tau - t|^{-\eta}, \text{ если } |\sigma - s| \ge \dfrac{2\pi}{2n+1}, \\ |e^{i\frac{2\pi}{2n+1}} - 1|^{-\eta}, \text{ если } |\sigma - s| < \dfrac{2\pi}{2n+1}; \end{cases}$$

$$\tau = e^{i\sigma}, t = e^{is}.$$

Введем следующие пространства функций: $X = H_{\beta}^{m}$ – пространство функций, удовлетворяющих условию (2) и имеющих производную m порядка, входящую в класс Гельдера H_{β}, с нормой

$$\|x\| = M^{(m)}(x) + H^{(m)}(x;\beta) = \sum_{k=0}^{m} \max_{t\in\gamma} |x^{(k)}(t)| + \sup_{t_2\neq t_1} \frac{\left|x^{(m)}(t_2) - x^{(m)}(t_1)\right|}{\left|t_2 - t_1\right|^{\beta}};$$

Y – пространство функций, удовлетворяющих условию Гельдера H_{β} с нормой $\| y \| = M^{(0)}(y) + H^{(0)}(y)$; $X_n \subset X$ – пространство функций вида $x_n(t)$; $Y_n \subset Y$ – пространство полиномов степени не выше n.

Обоснование метода проводится при $\beta < \alpha/2$.

Представим уравнение (1) и вычислительную схему метода коллокации соответственно в следующем виде:

$$Kx \equiv a_m(t)x^{(m)}(t) + b_m(t)\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma}\frac{x^{(m)}(\tau)}{\tau - t}d\tau + \sum_{k=0}^{m-1}\left[a_k(t)x^{(k)}(t) + \right.$$

$$\left. + b_k(t)\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma}\frac{x^{(k)}(\tau)}{\tau - t}d\tau\right] + \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{h_k(t,\tau)x^{(k)}(\tau)}{|\tau - t|^{\eta}}d\tau = f(t) \qquad (5)$$

и

$$K_n x_n \equiv P_n\left[a_m(t)x_n^{(m)}(t) + b_m(t)\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma}\frac{x_n^{(m)}(\tau)}{\tau - t}d\tau\right] +$$

$$+ P_n\left[\sum_{k=0}^{m-1}\left[a_k(t)x_n^{(k)}(t) + b_k(t)\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma}\frac{x_n^{(k)}(\tau)}{\tau - t}d\tau\right]\right] +$$

$$+ P_n\left[\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}h_k(t,\tau)d(t,\tau)x_n^{k}(\tau)d\tau\right] = P_n[f(t)]. \qquad (6)$$

Введем функцию $\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{x(\tau)}{\tau - z}d\tau.$

Нетрудно видеть, что

$$\Phi^{(k)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{x^{(k)}(\tau)}{\tau - z}d\tau.$$

Воспользовавшись формулами Сохоцкого – Племеля [5]

$$x^{(m)}(t) = \Phi^{(m)+}(t) - \Phi^{(m)-}(t),$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{x^{(m)}(\tau)}{\tau-t}d\tau = \Phi^{(m)+}(t)+\Phi^{(m)-}(t),$$

уравнения (5) и (6) можно представить в следующем виде:

$$(a_m(t)+b_m(t))\Phi^{(m)+}(t)+(b_m(t)-a_m(t))\Phi^{(m)-}(t)+$$
$$+\sum_{k=0}^{m-1}\left[a_k(t)x^{(k)}(t)+b_k(t)\frac{1}{\pi i}\int_\gamma \frac{x^{(k)}(\tau)}{\tau-t}d\tau\right]+$$
$$+\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{h_k(t,\tau)x^{(k)}(\tau)}{|\tau-t|^\eta}d\tau = f(t) \quad (7)$$

и

$$P_n\Big[(a_m(t)+b_m(t))\Phi_n^{(m)+}(t)+(b_m(t)-a_m(t))\Phi_n^{(m)-}(t)+$$
$$+\sum_{k=0}^{m-1}\left[a_k(t)x^{(k)}(t)+b_k(t)\frac{1}{\pi i}\int_\gamma \frac{x^{(k)}(\tau)}{\tau-t}d\tau\right]+$$
$$+\sum_{k=0}^{m}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{h_k(t,\tau)x^{(k)}(\tau)}{|\tau-t|^\eta}d\tau\right]\Big] = P_n[f(t)]. \quad (8)$$

Отметим, что

$$\Phi_n^{(m)+}(t)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\frac{(m+k)!}{k!}t^k,\ \ \Phi_n^{(m)-}(t)=-\sum_{k=-n}^{-1}\alpha_k\frac{(m+k)!}{(k-1)!}t^{k-m}.$$

Уравнения (7) и (8) эквивалентны следующим:

$$\Phi^{(m)+}(t)+\frac{b_m(t)-a_m(t)}{a_m(t)+b_m(t)}\Phi^{(m)-}(t)+$$
$$+\frac{1}{a_m(t)+b_m(t)}\left[\sum_{k=0}^{m-1}\left[a_k(t)x^{(k)}(t)+b_k(t)\frac{1}{\pi i}\int_\gamma \frac{x^{(k)}(\tau)}{\tau-t}d\tau\right]+\right.$$
$$\left.+\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{\pi i}\int_\gamma \frac{h_k(t,\tau)x^{(k)}(\tau)}{|\tau-t|^\eta}d\tau\right] = \frac{1}{a_m(t)+b_m(t)}f(t) \quad (9)$$

и

$$P_n\left[\left(\Phi_n^{(m)+}(t)+\frac{b_m(t)-a_m(t)}{a_m(t)+b_m(t)}\Phi_n^{(m)-}(t)+\right.\right.$$

$$+\frac{1}{a_m(t)+b_m(t)}\left[\sum_{k=0}^{m-1}\left[a_k(t)x_n^{(k)}(t)+b_k(t)\frac{1}{\pi i}\int_\gamma\frac{x_n^{(k)}(\tau)}{\tau-t}d\tau\right]+\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{\pi i}\int_\gamma\frac{h_k(t,\tau)x_n^{(k)}(\tau)}{|\tau-t|^\eta}d\tau\right]\right]=P_n\left[\frac{1}{a_m(t)+b_m(t)}f(t)\right]. \tag{10}$$

Пусть функция $G(t)=(b_m(t)-a_m t))/(a_m(t)+b_m(t))$ имеет индекс $\chi=m$. Тогда функцию $G(t)$ можно представить в виде $G(t)=t^m G_0(t)$, где функция $G_0(t)$ имеет индекс, равный нулю. Известно [5], что в этом случае краевая задача Римана $\psi^+(t)=G_0(t)\psi^-(t)$ имеет единственное решение, обращающееся в нуль на бесконечности.

Уравнения (9) и (10) можно представить в следующем виде:

$$\tilde{K}x\equiv\psi^-(t)\Phi^{(m)+}(t)+t^m\psi^+(t)\Phi^{(m)-}(t)+$$

$$+\frac{\psi^+(t)}{a_m(t)+b_m(t)}\left[\sum_{k=0}^{m-1}\left[a_k(t)x^{(k)}(t)+b_k(t)\frac{1}{\pi i}\int_\gamma\frac{x^{(k)}(\tau)}{\tau-t}d\tau\right]+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{h_k(t,\tau)x^{(k)}(\tau)}{|\tau-t|^\eta}d\tau\right]=\frac{\psi^+(t)}{a_m(t)+b_m(t)}f(t) \tag{11}$$

и

$$\tilde{K}_n x_n\equiv P_n\left[\psi^-(t)\Phi_n^{(m)+}(t)+t^m\psi^+(t)\Phi_n^{(m)-}(t)+\right.$$

$$+\frac{\psi^+(t)}{a_m(t)+b_m(t)}\left[\sum_{k=0}^{m-1}\left[a_k(t)x_n^{(k)}(t)+b_k(t)\frac{1}{\pi i}\int_\gamma\frac{x_n^{(k)}(\tau)}{\tau-t}d\tau\right]+\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{h_k(t,\tau)x_n^{(k)}(\tau)}{|\tau-t|^\eta}d\tau\right]\right]=P_n\left[\frac{\psi^+(t)}{a_m(t)+b_m(t)}f(t)\right]. \tag{12}$$

Обозначим через $\psi_n^+(t)$ и $\psi_n^-(t)$ полиномы наилучшего равномерного приближения степени n к функциям $\psi^+(t)$ и $\psi^-(t)$. Так как функция $\psi^+(z)$ ($\psi^-(z)$) – аналитическая внутри (вне) единичного круга с центром в начале координат, то полиномы $\psi_n^+(t)$ и $\psi_n^-(t)$ имеют вид $\psi_n^+(t)=\sum_{k=0}^{n}\beta_k t^k$, $\psi_n^-(t)=\sum_{k=-n}^{-1}\beta_k t^k$.

Замечание 1. Напомним [5], что через $\psi^{+}(t)(\psi^{-}(t))$ обозначаются функции аналитические внутри (вне) единичной окружности γ с центром в начале координат.

Замечание 2. Ищется решение задачи Римана $\psi^{+}(t)=G_0(t)\psi^{-}(t)$ с функцией $\psi^{-}(t)$, удовлетворяющей условию $\psi^{-}(\infty)=0$.

Аппроксимируем уравнения (11) и (12) следующими:

$$Lx\equiv\psi_n^{-}(t)\Phi^{(m)+}(t)+t^m\psi_n^{+}(t)\Phi^{(m)-}(t)+$$

$$+\frac{\psi^{+}(t)}{a_m(t)+b_m(t)}\left[\sum_{k=0}^{m-1}\left[a_k(t)x^{(k)}(t)+b_k(t)\frac{1}{\pi i}\int_\gamma\frac{x^{(k)}(\tau)}{\tau-t}d\tau\right]+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{h_k(t,\tau)x^{(k)}(\tau)}{|\tau-t|^{\eta}}d\tau\right]=\frac{\psi^{+}(t)}{a_m(t)+b_m(t)}f(t) \tag{13}$$

и

$$L_nx_n\equiv P_n\left[\psi_n^{-}(t)\Phi_n^{(m)+}(t)+t^m\psi_n^{+}(t)\Phi_n^{(m)-}(t)+\right.$$

$$+\frac{\psi^{+}(t)}{a_m(t)+b_m(t)}\left[\sum_{k=0}^{m-1}\left[a_k(t)x_n^{(k)}(t)+b_k(t)\frac{1}{\pi i}\int_\gamma\frac{x_n^{(k)}(\tau)}{\tau-t}d\tau\right]+\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{h_k(t,\tau)x_n^{(k)}(\tau)}{|\tau-t|^{\eta}}d\tau\right]\right]=P_n\left[\frac{\psi^{+}(t)}{a_m(t)+b_m(t)}f(t)\right]. \tag{14}$$

Нетрудно видеть, что при выполнении условий (а)

$$\|\psi^{+}(t)-\psi_n^{+}(t)\|\le cn^{-\alpha+\beta},$$

$$\|\psi^{-}(t)-\psi_n^{-}(t)\|\le cn^{-\alpha+\beta}. \tag{15}$$

Так как оператор $K\in[X,Y]$ непрерывно обратим, то из теоремы Банаха [6] следует, что оператор $\tilde{K}\in[X,Y]$ тоже непрерывно обратим. Отсюда и из неравенств (15) следует, что при n таких, что $q=cn^{-\alpha+\beta}<1$, оператор $L\in[X,Y]$ непрерывно обратим.

Можно показать, что

$$P_n[\psi_n^{-}(t)\Phi_n^{(m)+}(t)+t^m\psi_n^{+}(t)\Phi_n^{(m)-}(t)]\equiv\psi_n^{-}(t)\Phi_n^{(m)+}(t)+t^m\psi_n^{+}(t)\Phi_n^{(m)-}(t),$$

$$\frac{\psi^{+}(t)}{a_m(t)+b_m(t)}\sum_{k=0}^{m-1}\left[a_k(t)x^{(k)}(t)+b_k(t)\frac{1}{\pi i}\int_\gamma\frac{x^{(k)}(\tau)}{\tau-t}d\tau\right]\in H_\alpha,$$

оператор $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{h_k(t,\tau)x^{(k)}(\tau)}{|\tau-t|^\eta}d\tau,\quad k=0,1,\ldots,m,$ принадлежит [7] множеству функций H_ζ, где $\zeta=1$ при $\alpha>\eta$, $\zeta=\alpha+1-\eta$ при $\alpha<\eta$ и принадлежит классу функций Зигмунда при $\alpha=\eta$. Учитывая [8], что $\|P_n\|\le c\ln n$ из теоремы Банаха об обратном операторе [6], заключаем, что оператор

$$\tilde{L}x\equiv\psi_n^-(t)\Phi^{(m)+}(t)+t^m\psi_n^+(t)\Phi^{(m)-}(t)+$$

$$+P_n\left[\frac{\psi^+(t)}{a_m(t)+b_m(t)}\left[\sum_{k=0}^{m-1}\left[a_k(t)x^{(k)}(t)+b_k(t)\frac{1}{\pi i}\int_\gamma\frac{x^{(k)}(\tau)}{\tau-t}d\tau\right]+\right.\right.$$

$$\left.+\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{h_k(t,\tau)x^{(k)}(\tau)}{|\tau-t|^\eta}d\tau\right]$$

непрерывно обратим.

Из теоремы о левом обратном операторе [9] следует, что $\|\tilde{L}x\|_Y\ge m\|x\|_X$. Следовательно, на подпространствах $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ $\|\tilde{L}x_n\|_{Y_n}\ge m\|x\|_{X_n}$. Последнее неравенство эквивалентно следующему $\|L_nx_n\|_{Y_n}\ge m\|x_n\|_{X_n}$. Из этого неравенства следует существование левого обратного оператора $(L_n)_l^{-1}$. Так как оператор L_n – конечномерный, то из существования левого обратного оператора $(L_n)_l^{-1}$ следует его обратимость.

Нетрудно видеть, что $\|\tilde{K}_nx_n-L_nx_n\|\le cn^{-\alpha+\beta}\ln n$. Следовательно, по теореме Банаха об обратном операторе, при n таких, что $q_1=cn^{-\alpha+\beta}\ln n<1$, уравнение (12) однозначно разрешимо. Так как уравнения (12) и (6) эквивалентны, то тем самым доказана однозначная разрешимость системы уравнений (6). Таким образом, доказано, что при n таких, что $q=cn^{-\alpha+\beta}\ln n<1$, метод коллокации (6) однозначно разрешим.

Переход от вычислительной схемы метода коллокации (6) к вычислительной схеме метода механических квадратур (4) проводится способом, подробно описанным в [7].

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть краевая задача (1), (2) однозначно разрешима, выполнены условия (а) и индекс функции

$$G(t)=(b_m(t)-a_m(t))/(a_m(t)+b_m(t))$$

равен *m*. Тогда при n таких, что $q=cn^{-\xi}\ln n<1$, $\xi=\min(\alpha-\beta,1-\eta-\beta,\beta)$, система уравнений (4) имеет единственное решение x_n^* и справедлива оценка $\|x^*(t)-x_n^*(t)\|\le cn^{-\xi}\ln n$, где x^* – решение краевой задачи (1), (2).

Рассмотрим изменения, которые нужно внести в обоснование метода в предположении, что индекс χ функции $G(t)$ $\chi>m$.

Как и выше, краевая задача (1), (2) и система (6) метода коллокации сводятся к уравнениям (9) и (10). Так как функция $G(t)$ имеет индекс $\chi = m + m_1$, то представим ее в виде $G(t) = t^{\chi} G_*(t) = t^{\chi} \psi_*^+(t) / \psi_*^-(t)$, где $\psi_*^{\pm}(t)$ – решение краевой задачи Римана $\psi_*^+(t) = G_*(t)\psi_*^-(t)$.

Тогда уравнения (9) и (10) эквивалентны следующим:

$$\frac{\psi_*^-(t)\Phi^{(m)+}(t)}{t^{m_1}} + t^m \psi_*^+(t)\Phi^{(m)-}(t) +$$

$$+\frac{\psi_*^-(t)}{t^{m_1}(a_m(t)+b_m(t))}\left[\sum_{k=0}^{m-1}\left[a_k(t)x^{(k)}(t) + b_k(t)\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma}\frac{x^{(k)}(\tau)}{\tau - t}d\tau\right] +\right.$$

$$\left. +\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{h_k(t,\tau)x^{(k)}(\tau)}{|\tau - t|^{\eta}}d\tau\right] = \frac{\psi_*^-(t)}{t^{m_1}(a_m(t)+b_m(t))}f(t) \qquad (16)$$

и

$$P_n\left[\frac{\psi_*^-(t)\Phi^{(m)+}(t)}{t^{m_1}(a_m(t)+b_m(t))}\left[\sum_{k=0}^{m-1}\left[a_k(t)x_n^{(k)}(t) + b_k(t)\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma}\frac{x^{(k)}(\tau)}{\tau - t}d\tau\right] +\right.\right.$$

$$\left.\left. +\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{h_k(t,\tau)x^{(k)}(\tau)}{|\tau - t|^{\eta}}d\tau\right]\right] = P_n\left[\frac{\psi_*^-(t)}{t^{m_1}(a_m(t)+b_m(t))}f(t)\right]. \qquad (17)$$

Обозначим через $\psi_{*n}^+(t)$ полином наилучшего равномерного приближения степени n функции $\psi_*^+(t)$, а через $\psi_{*n-m_1}^-(t)$ – полином наилучшего равномерного приближения степени $(n - m_1)$ функции $\psi_*^-(t)$. Нетрудно видеть, что выражение $\dfrac{\psi_{*n-m_1}^-(t)\Phi_n^{(m)+}(t)}{t^{m_1}} + t^m \psi_{*n}^+(t)\Phi_n^{(m)-}(t)$ является тригонометрическим полиномом степени n. Поэтому к уравнениям (15), (16) можно применить рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 1. В результате приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. Пусть краевая задача (1), (2) однозначно разрешима, выполнены условия (а) и индекс функции

$$G(t) = (b_m(t) - a_m(t)) / (a_m(t) + b_m(t))$$

равен $m + m_1, m_1 > 0$. Тогда при n таких, что $q = cn^{-\xi}\ln n < 1$, $\xi = \min(\alpha - \beta, 1 - \eta - \beta, \beta)$ система уравнений (4) имеет единственное решение x_n^* и справедлива оценка $\| x^*(t) - x_n^*(t) \| \le cn^{-\xi}\ln n$, где x^* – решение краевой задачи (1), (2).

Замечание 3. Утверждения теоремы остаются в силе, если вместо однозначной разрешимости краевой задачи (1), (2) потребовать ее разрешимость при любой правой части. В этом случае при обосновании достаточно воспользоваться общей теорией приближенных методов для обратимых справа операторов [7].

Рассмотрим теперь изменения, которые нужно внести в доказательство теоремы 1 в предположении, что индекс χ функции $G(t)$ меньше m.

Функцию $G(t)$ можно представить в виде

$$G(t) = t^{\chi} G_1(t) = t^{\chi} g^{+}(t) / g^{-}(t),$$

где $g^{\pm}$ – решение краевой задачи $g^{+}(t) = G_1(t) g^{-}(t)$. Тогда уравнения (11), (12), рассуждениями, приведенными при доказательстве теоремы 1, преобразуются к уравнениям

$$t^{m-\chi} g^{-}(t) \Phi^{(m)+}(t) - t^{m} g^{+}(t) \Phi^{(m)-}(t) +$$

$$+ \frac{t^{m-\chi} g^{-}(t)}{a_m(t) + b_m(t)} \left[\sum_{k=0}^{m-1} \left[a_k(t) x^{(k)}(t) + b_k(t) \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{x^{(k)}(\tau)}{\tau - t} d\tau \right] + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{h_k(t,\tau) x^{(k)}(\tau)}{|\tau - t|^{\eta}} d\tau \right] = \frac{t^{m-\chi} g^{-}(t)}{a_m(t) + b_m(t)} f(t), \tag{18}$$

$$P_n[t^{m-\chi} g^{-}(t) \Phi_n^{(m)+}(t) - t^{m} g^{+}(t) \Phi_n^{(m)-}(t) +$$

$$+ \frac{t^{m-\chi} g^{-}(t)}{a_m(t) + b_m(t)} \left[\sum_{k=0}^{m-1} \left[a_k(t) x_n^{(k)}(t) + b_k(t) \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{x_n^{(k)}(\tau)}{\tau - t} d\tau \right] + \right.$$

$$\left. \left. + \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{h_k(t,\tau) x_n^{(k)}(\tau)}{|\tau - t|^{\eta}} d\tau \right] \right] = P_n \left[\frac{t^{m-\chi} g^{-}(t)}{a_m(t) + b_m(t)} f(t) \right]. \tag{19}$$

В случае, если функция $g^{-}(t)$ ортогональна на единичной окружности полиномам t^{-k}, $k = 1, 2, \ldots, m - \chi$, то выражение

$$t^{m-\chi} g_n^{-}(t) \Phi_n^{(m)+}(t) - t^{m} g_n^{+}(t) \Phi_n^{(m)-}(t)$$

является тригонометрическим полиномом порядка n. Здесь $g_n^{-}(t) -$ отрезок ряда Лорана разложения функции $g^{-}(t)$ по степеням t^{-k}, $k = 1, 2, \ldots, n$; $g_n^{+}(t) -$ наилучшее равномерное приближение функции $g^{+}(t)$ полиномами n-го порядка по степеням t^{k}, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 1, приходим к следующему утверждению.

Теорема 3. Пусть краевая задача (1), (2) разрешима, выполнены условия (а) и индекс χ функции $G(t) = (b_m(t) - a_m(t)) / (a_m(t) + b_m(t))$ меньше m, функция $g^-(t)$ ортогональна на единичной окружности полиномам t^{-k}, $k = 1, 2, \ldots, m - \chi$, Тогда при n таких, что $q = cn^{-\xi} \ln n < 1$, $\xi = \min(\alpha - \beta, 1 - \eta - \beta, \beta)$ система уравнений (4) имеет единственное решение x_n^* и справедлива оценка $\| x^*(t) - x_n^*(t) \| \le cn^{-\xi} \ln n$, где x^* – решение краевой задачи (1), (2).

Рассмотрим линейные сингулярные интегродифференциальные уравнения

$$Kx \equiv \sum_{k=0}^{m} \left[a_k(t) x_n^{(k)}(t) + \frac{1}{\pi i} \int_\gamma \frac{h_k(t,\tau) x^{(k)}(\tau)}{\tau - t} d\tau \right] = f(t) \tag{20}$$

при граничных условиях

$$\int_\gamma x(t) t^{-k-1} dt = 0,\ k = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{21}$$

Приближенное решение граничной задачи (20)–(21) будем искать в виде полинома (3), коэффициенты $\{\alpha_k\}$ которого определяются из системы линейных алгебраических уравнений:

$$K_n x_n \equiv \overline{P}_n \left[\sum_{k=0}^{m} a_k(t) x_n^{(k)}(t) + \frac{1}{\pi i} \int_\gamma P_n \left[\frac{h_k(t,\tau) x^{(k)}(\tau)}{\tau - t} \right] d\tau \right] = \overline{P}_n [f(t)]. \tag{22}$$

Оператор P_n определен выше, а через $\overline{P}_n$ обозначен оператор проектирования на множество тригонометрических полиномов n порядка по узлам $\overline{t}_k = \exp\{i\overline{s}_k\}$, $\overline{s}_k = (2k+1)\pi / (2n+1)$, $k = 0, 1, \ldots, 2n$.

Метод коллокации для уравнения (20) имеет вид

$$\overline{K}_n x_n \equiv \overline{P}_n \left[\sum_{k=0}^{m} a_k(t) x_n^{(k)}(t) + \frac{1}{\pi i} \int_\gamma \frac{h_k(t,\tau) x^{(k)}(\tau)}{\tau - t} d\tau \right] = \overline{P}_n [f(t)]. \tag{23}$$

Для обоснования метода коллокации заметим, что уравнения (20) и (23) преобразуются к виду

$$Kx \equiv \sum_{k=0}^{m} \left[a_k(t) x^{(k)}(t) + h_k(t,t) \frac{1}{\pi i} \int_\gamma \frac{x^{(k)}(\tau)}{\tau - t} d\tau + \frac{1}{\pi i} \int_\gamma \frac{d_k(t,\tau) x^{(k)}(\tau)}{|\tau - t|^\eta} d\tau \right] = f(t) \tag{24}$$

и

$$\overline{K}_n x_n \equiv \overline{P}_n \left[\sum_{k=0}^{m} \left[a_k(t) x_n^{(k)}(t) + h_k(t,t) \frac{1}{\pi i} \int_\gamma \frac{x_n^{(k)}(\tau)}{\tau - t} d\tau + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{d_k(t,\tau) x^{(k)}(\tau)}{|\tau - t|^{\eta}} d\tau \right] = \overline{P}_n [f(t)]. \tag{25}$$

Здесь $(h_k(t,\tau) - h_k(t,t)) / (\tau - t) = d_k(t,\tau) / |\tau - t|^{\eta}, k = 0,1,\ldots,m.$

Обоснование сходимости метода коллокации для задачи (24), (21) проведено при доказательстве теорем 1–3. Тем самым проведено доказательство сходимости метода коллокации для задачи (20), (21).

Переход от метода коллокации к методу механических квадратур проводится на основании рассуждений, подробно описанных в статье [10] и в разделе 2 главы 3 монографии [7], и здесь на этом не останавливаемся.

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть краевая задача (20), (21) однозначно разрешима, выполненые условия (в) и индекс χ функции

$$G(t) = (h_m(t,t) - a_m(t)) / (h_m(t,t) + a_m(t))$$

больше или равен m. Тогда при n таких, что $q = cn^{-(r+\alpha-\beta)} \ln n < 1$, система уравнений (22) имеет единственное решение x_n^* и справедлива оценка $\| x^*(t) - x_n^*(t) \| \le cn^{-(r+\alpha-\beta)} \ln n$, где $x^*(t)$ – решение краевой задачи (20), (21).

В случае, если $\chi < m$, приведенное утверждение справедливо при следующих дополнительных условиях:

1) функцию

$$G(t) = (h_m(t,t) - a_m(t)) / (h_m(t,t) + a_m(t))$$

можно представить в виде $G(t) = t^{\chi} G_1(t) = t^{\chi} g^+(t) / g^-(t)$, где $g^{\pm}$ – решение краевой задачи $g^+(t) = G_1(t) g^-(t)$;

2) функция $g^-(t)$ ортогональна на единичной окружности полиномам t^{-k}, $k = 1,2,\ldots,m-\chi$.

Рассмотрим нелинейное сингулярное интегродифференциальное уравнение

$$Kx \equiv \sum_{k=0}^{m} \left[a_k(t, x^{(k)}(t)) + \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{h_k(t,\tau,x^{(k)}(\tau))}{\tau - t} d\tau \right] = f(t) \tag{26}$$

при граничных условиях

$$\int_{\gamma} x(t) t^{-k-1} dt = 0, k = 0,1,\ldots,m-1. \tag{27}$$

Приближенное решение граничной задачи (26)–(27) будем искать в виде полинома (3), коэффициенты $\{\alpha_k\}$ которого определяются из системы нелинейных алгебраических уравнений

$$K_n x_n \equiv \overline{P}_n \left[\sum_{k=0}^{m} \left[a_k(t, x^{(k)}(t)) + \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} P_n \left[\frac{h_k(t,\tau,x_n^{(k)}(\tau))}{\tau - t} \right] d\tau \right] \right] = \overline{P}_n [f(t)]. \tag{28}$$

Будем считать выполненными следующие условия:

1) краевая задача (26), (27) имеет решение $x^*(t)$, единственное в некоторой сфере $B(x^*, R)$ с радиусом R;

2) производная Фреше оператора $K(x)$ непрерывно обратима в сфере $B(x^*, R)$;

3) функции $a_k(t,u)$, $k = 0,1,\ldots,m$, удовлетворяют условию Гельдера по первой переменной и имеют производные, удовлетворяющие условию Гельдера по второй переменной;

4) функции $h_k(t,\tau,u)$, $k = 0,1,\ldots,m$, удовлетворяют условию Гельдера по первым двум переменным и имеют производные, удовлетворяющие условию Гельдера по третьей переменной.

Покажем, что при выполнении этих условий система уравнений (28) имеет единственное решение x_n^* и, если известно достаточно хорошее начальное приближение x_0 к решению x^*, итерационный метод Ньютона – Канторовича

$$x_n^{l+1}(t) = x_n^l(t) - [K_n'(x_0)]^{-1}(K_n(x_n^l) - f_n(t)), \quad l = 0,1,\ldots,$$

сходится к решению $x_n^*(t)$ уравнения (28). Здесь $K_n'(x_0)$ – производная Фреше оператора $K_n(x_n)$ на начальном элементе x_0.

Доказательство этого утверждения состоит из следующих элементов:

1) доказательства обратимости оператора $K_n'(x_0)$;

2) проверки выполнения условий теоремы 6.7 из первой главы монографии [7].

Существование обратного оператора $[K_n'(x_0)]^{-1}$ следует из рассуждений, проведенных при доказательстве теоремы 4. Проверка условий теоремы 6.7 проводится по аналогии с рассуждениями, приведенными в главе 3 монографии [7].

3. Приближенное решение гиперсингулярных интегродифференциальных уравнений

В этом разделе исследуются приближенные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений вида

$$Kx \equiv a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + \frac{b_1(t)}{\pi i}\int_\gamma \frac{x(\tau)d\tau}{\tau - t} +$$

$$+\frac{b_2(t)}{\pi i}\int_\gamma \frac{x(\tau)d\tau}{(\tau - t)^2} + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma h(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t) \qquad (29)$$

при граничном условии

$$\int_\gamma x(\tau)d\tau = 0. \qquad (30)$$

Интегральные уравнения, в состав которых входят интегралы с сингулярными и гиперсингулярными ядрами, находят применение в теории антенн [10]. Аналитическое исследование таких уравнений при ряде ограничений проведено в [11], а численные методы рассмотрены в [12, 13].

Покажем, что для приближенного решения краевой задачи (29), (30) применимы методы, изложенные в предыдущем разделе.

Приближенное решения краевой задачи (29), (30) будем искать в виде полинома (3) (при $m = 1$), коэффициенты $\{\alpha_k\}$ которого определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$K_n x_n \equiv P_n\left[a_1(t)x_n'(t)+a_0(t)x_n(t)+\frac{b_1(t)}{\pi i}\int_\gamma \frac{x_n(\tau)d\tau}{\tau-t}+\right.$$

$$\left.+\frac{b_2(t)}{\pi i}\int_\gamma \frac{x_n(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2}+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma P_n\left[h(t,\tau)x(\tau)\right]d\tau\right]=P_n[f(t)]. \qquad (31)$$

Для обоснования сходимости вычислительной схемы (3), (31) представим уравнение (29) в виде сингулярного интегродифференциального уравнения

$$a_1(t)x'(t)+a_0(t)x(t)+\frac{b_1(t)}{\pi i}\int_\gamma \frac{x(\tau)d\tau}{\tau-t}+$$

$$+\frac{b_2(t)}{\pi i}\int_\gamma \frac{x'(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2}+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma h(t,\tau)x(\tau)d\tau=f(t). \qquad (32)$$

Систему уравнений (31) представим в виде

$$K_n x_n \equiv P_n\left[a_1(t)x_n'(t)+a_0(t)x_n(t)+\frac{b_1(t)}{\pi i}\int_\gamma \frac{x_n(\tau)d\tau}{\tau-t}+\right.$$

$$\left.+\frac{b_2(t)}{\pi i}\int_\gamma \frac{x_n'(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2}+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma P_n\left[h(t,\tau)x_n(\tau)\right]d\tau\right]=P_n[f(t)]. \qquad (33)$$

Обоснование вычислительной схемы (33) для краевой задачи (32), (30) проведено в предыдущем разделе. Нетрудно видеть, что полученные там результаты распространяются на вычислительную схему (31).

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. Пусть краевая задача (29), (30) однозначно разрешима, выполнены условия (а) и индекс функции $G(t)=(b_2(t)-a_1(t))/(a_1(t)+b_2(t))$ равен единице. Тогда при n таких, что

$$q = cn^{-\xi}\ln n < 1,$$

$$\xi = \min(\alpha-\beta, 1-\eta-\beta, \beta)$$

система уравнений (31) имеет единственное решение x_n^* и справедлива оценка $\| x^*(t) - x_n^*(t) \| \le cn^{-\xi} \ln n,$ где x^* – решение краевой задачи (29), (30).

Замечание 4. Результаты, изложенные в работе, допускают распространение и на другие проекционные методы, в частности, на методы моментов и Бубнова – Галеркина. При этом нужно сделать следующие изменения в вычислительной схеме и доказательстве сходимости. Во-первых, предварительно перейти от краевой задачи (1)–(2) к краевой задаче (11), (2). Во-вторых, соответствующую вычислительную схему представить в виде

$$S_n \Bigg[\psi^-(t)\Phi_n^{(m)+}(t) + t^m \psi^+(t)\Phi_n^{(m)-}(t) +$$

$$+\frac{\psi^+(t)}{a_m(t)+b_m(t)} \left[\sum_{k=0}^{m-1} \left[a_k(t) x_n^{(k)}(t) + b_k(t) \frac{1}{\pi i} \int_\gamma \frac{x_n^{(k)}(\tau)}{\tau - t} d\tau \right] + \right.$$

$$\left. \left. + \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{h_k(t,\tau) x_n^{(k)}(\tau)}{|\tau - t|^\eta} d\tau \right] \right] = S_n \left[\frac{\psi^+(t)}{a_m(t)+b_m(t)} f(t) \right],$$

где S_n – оператор проектирования на соответствующее подпространство. В случае метода моментов этим подпространством является множество полиномов степени n и обоснование метода проводится в подпространстве пространства L_2.

Замечание 5. В случае, если коэффициенты и правые части уравнений удовлетворяют условию (б), необходимые изменения в обосновании вычислительных методов можно проследить, сравнивая приведенные выше выкладки, с рассуждениями, содержащимися в работе [14] (см. также книгу [7].)

Заключение

В работе предложены вычислительные схемы методов коллокации и механических квадратур для приближенного решения сингулярных и гиперсингулярных интегродифференциальных уравнений. Обоснование вычислительных схем проведено в пространствах Гельдера. Проведя аналогии между приведенными в данной статье доказательствами сходимости приближенных методов решения сингулярных интегродифференциальных уравнений в пространствах Гельдера и приведенными в главе 3 монографии [7] доказательствами сходимости решения сингулярных интегральных уравнений в пространствах Гельдера и пространстве суммируемых функций, легко получить аналоги приведенных выше утверждений в пространствах суммируемых функций.

Список литература

1. **Бойков, И. В.** Приближенное решение сингулярных интегродифференциальных уравнений / И. В. Бойков, И. И. Жечев // Точные науки : сб. аспир. работ. – Казань : Изд-во КГУ, 1972. – С. 169–174.
2. **Бойков, И. В.** К приближенному решению сингулярных интегродифференциальных уравнений 1 [линейные уравнения] / И. В. Бойков, И. И. Жечев // Дифференциальные уравнения. – 1973. – Т. 9, № 8. – С. 1493–1502.

3. **Бойков, И. В.** К приближенному решению сингулярных интегродифференциальных уравнений 2 / И. В. Бойков, И. И. Жечев // Дифференциальные уравнения. – 1975. – Т. 11, № 3. – С. 562–571.
4. **Бойков, И. В.** Принцип компактной апроксимации в возмущенном методе Галеркина / И. В. Бойков // ДАН СССР. – 1974. – Т. 215, № 1. – С. 11–14.
5. **Гахов, Ф. Д.** Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – М. : Наука, 1963. – 640 с.
6. **Люстерник, Л. А.** Элементы функционального анализа / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. – М. : Наука, 1965. – 540 с.
7. **Бойков, И. В.** Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений / И. В. Бойков. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2004. – 316 с.
8. **Натансон, И. П.** Конструктивная теория функций / И. П. Натансон. – М. ; Л., 1949. – 688 с.
9. **Канторович, Л. В.** Функциональный анализ в нормированных пространствах / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М. : Наука, 1959. – 684 с.
10. **Бойков, И. В.** Об одном прямом методе решения сингулярных интегральных уравнений / И. В. Бойков // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1972. – Т. 12, № 6. – С. 1381–1390.
11. **Лифанов, И. К.** Гиперсингулярные интегральные уравнения и теория проволочных антенн / И. К. Лифанов, А. С. Ненашев // Дифференциальные уравнения. – 2005. – Т. 41, № 1. – С. 121–137.
12. **Лифанов, И. К.** К решению составных особых интегральных уравнений / И. К. Лифанов // Успехи современной радиотехники. – 2006. – № 8. – С. 62–67.
13. **Бойков, И. В.** Приближенные методы решения составных особых интегральных уравнений / И. В. Бойков, Е. Г. Романова // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем : тр. II Междунар. науч.-техн. конф. – Пенза, 2007. – С. 31–36.
14. **Бойков, И. В.** К приближенному решению сингулярных интегральных уравнений / И. В. Бойков // Математические заметки. – 1972. – Т. 12, № 2. – С. 177–186.

Бойков Илья Владимирович
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей и прикладной математики, Пензенский государственный университет

Boykov Ilya Vladimirovich
Doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of sub-department of higher and applied mathematics, Penza State University

E-mail: math@pnzgu.ru

Захарова Юлия Фридриховна
кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра высшей и прикладной математики, Пензенский государственный университет

Zakharova Yuliya Fridrikhovna
Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, sub-department of higher and applied mathematics, Penza State University

E-mail: math@pnzgu.ru

УДК 517.392

Бойков, И. В.

Приближенные методы решения сингулярных и гиперсингулярных интегродифференциальных уравнений / И. В. Бойков, Ю. Ф. Захарова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – № 3 (23). – С. 99–113.